„...amennyiben szellemi lények vagyunk”

Tanulmányok Immanuel Kant aktualitásáról

Tánczos Péter, Varga Rita (szerk.)

L'Harmattan

„...amennyiben szellemi lények vagyunk"

Tanulmányok Immanuel Kant aktualitásáról

Szerkesztette
Tánczos Péter és Varga Rita

L'Harmattan
Budapest

A kötet megjelenését a Nemzeti Kulturális Alap
és a Doktoranduszok Országos Szövetsége támogatta.
Pályázati azonosító: NKA 3437/01872

ISBN 978-963-414-170-9
ISSN 2064-1532

A kiadásért felel Gyenes Ádám, a L'Harmattan Kiadó igazgatója

A kiadó kötetei megrendelhetők, illetve kedvezménnyel megvásárolhatók:

L'Harmattan Könyvesbolt
1053 Budapest, Kossuth L. u. 14–16.
Tel.: +36-1-267-5979
harmattan@harmattan.hu
www.harmattan.hu

Párbeszéd Könyvesbolt
1085 Budapest, Horánszky u. 20.
Tel.: +36-1-445-2775
parbeszedkonyvesbolt@gmail.com
www.konyveslap.hu

TARTALOM

*Székely László**

A KANTI A PRIORI ÉS A NEM EUKLEIDÉSZI GEOMETRIÁK

I. Bevezetés

I. 1. Az antikantiánus filozófiai folklór

Témám első közelítésben triviálisnak tűnhet, hiszen *a filozófiai közvélekedés szerint* a nem eukleidészi geometriák felfedezésével a tér, illetve az eukleidészi geometria a priori természetére vonatkozó kanti tanítás meghaladottá vált, s ezt azután a fizika oldaláról megerősítette Albert Einstein általános relativitáselmélete, amely a fizikai világot a nem eukleidészi geometriák segítségével írja le. Így a volt hivatalos „marxista" filozófia kötelező tananyagában a nem eukleidészi geometriák és a relativitáselmélet a térképzetek és a geometria empirikus-materiális eredetére vonatkozó „bizonyítékok"-ként szerepeltek a kötelezően bírálandó transzcendentális idealizmussal szemben. Ennek megfelelően a nem eukleidészi geometriákkal foglalkozó matematikusi államvizsgatételhez kiegészítő filozófiai kérdésként kapcsolódott az ezen geometriák filozófiai jelentőségére vonatkozó kérdés, melyre természetesen azt a választ kellett adni, hogy ezek az elméletek a geometria empirikus-materialisztikus eredetét igazolják, s e válasszal még a marxizmus iránt egyébként szkeptikus matematikusok is örömmel azonosultak. S valóban: az a nézet, hogy a nem eukleidészi geometriák nyomán tarthatatlanná vált a tér és a geometria a piori jellegére vonatkozó kanti tanítás, a filozófiai állásponttól függetlenül általánosan elterjedt – mondhatni, már-már közhelyszerű – igazságnak számít nem csupán általában, értelmiségi-, hanem kifejezetten filozófuskörökben is.

Csakhogy csupán *filozófiai folklór* az az elképzelés, amely szerint a kanti tanítás és a nem eukleidészi geometriák viszonyának ez a radikálisan an-

* MTA BTK, Filozófiai Intézet

tikantiánus interpretációja vitathatatlan evidencia volna, és erről már azáltal is meggyőződhetünk, ha futólagosan pillantást vetünk a tárgykör szakirodalmára. Így a kanti tanítás és a nem eukleidészi geometriák közötti ellentét tézisét elsőként markáns formában megfogalmazó Helmholz álláspontjával[1] szemben már kortársa, J. P. N. Land komoly ellenérveket fogalmazott meg.[2] S bár ennek ellenére később vitathatatlanul ez az antikantiánus értelmezés vált uralkodóvá, a Kant-irodalom sohasem azonosult teljesen ezzel az állásponttal. Így az antikantiánus értelmezést képviselte – az álláspontok diffúz jellegére jellemzően szerzőkként más és más megfontolások alapján – többek között (ifjúkori önmagával szemben) az érett Russell, a neokantiánus Cassirer, továbbá Carnap, Schlick és Reichenbach. De a geometria fejlődésének jegyében a kanti tanítást mára már elavultnak minősíti az egyébként Russellt és Carnapot kritizáló, velük szemben prokantiánusnak tűnő Hintikka és Michael Fridmann is.[3] Viszont az ellentétes pozíciót képviselte a matematika filozófiájának nagy tekintélye, Gottlob Frege,[4] és a téma mai irodalmában is számos olyan állásponttal találkozhatunk, amely némi modifikációval a tér és a geometria a priori természetére vonatkozó kantiánus tézist a nem eukleidészi geometriák és a relativitás elméletének ismeretében is tarthatónak tekinti.[5]

1 Helmholtz 1876, különösen 314., 319–321. (Vö. még Hatfield 1984; Schirn 1991.)
2 Land 1877.
3 Vö. Reichenbach 1936, 1958, 30–92.; Russell 1903, 1919, 1945, 716.; Cassirer 1907, 29–31., 1922, 91–92.; Carnap 1966, 1995, 125–183.; Hintikka 1965, 1984; Friedmann 1985, 2000; (Cassier kapcsán ugyancsak lásd Heis 2011. A kevésbé ismert szerzők közül pl. Holmes 1955; Craig 1969; Kitcher1975; Hagar 2008; Godlove 2009.)
4 Fregével kapcsolatosan lásd Merrick 2006. Hasonló álláspontot képviselt (a kanti a priori fogalmának némi átértelmezésével) a neokantiánus Natorp és Cohen (lásd ugyancsak Merrick 2006). Ide sorolható még pl. Lucas 1969; Carson 1997; Shabel 2004; Kim 2006; Izard és munkatársai 2011; Grozdanoff http://www.researchgate.net/profile/Boris_Grozdanoff/.
5 Pl. Russell 1897; Nelson 1906; Ewing 1938, 42.; Jones 1946; Parsons 1964; Strawson 1966, 277–292.; Körner 1966, 465–468.; Carsons 1977; Warren 1998, 207.; Barker, 1992; Lenhard 2006; Kjosavik 2009; Kvasz 2011, Dunlop 2012.

I. 2. A tét a filozófia szuverenitása

S természetesen nem egyszerűen „a geometria természeté"-ről van e vitában szó. A *tét* ennél jóval nagyobb: *maga a filozófia*. Ha a nem eukleidészi geometriák és a relativitás fizikai elmélete nem volnának összeegyeztethetők a térre és a geometriára vonatkozó kanti koncepcióval, és ez a probléma nem volna a kanti filozófia szempontjából lokalizálható, akkor ez igen súlyos következménnyel járna mind a kanti tanításra, mind pedig általában a filozófiára nézve. A tér a priori jellegére vonatkozó tanítás elvetése ugyanis *A tiszta ész kritikájá*nak egész épületét romba dönthetné, s ez egyben azt is jelentené, hogy egy – a gondolkodás történetében kulcsfontosságú szerepet játszó – filozófiai tanítást a szaktudományok meghaladhatnak. Így nem véletlen, hogy már a XIX. század végén – elsősorban a fiatal Bertrand Russell révén – kialakult egy olyan interpretáció, amely megoldja ezt a problémát. Eszerint amikor Kant az eukleidészi geometriát az a priori státuszába emelte, annyiban valóban tévedett, hogy kora geometriájához kötődött, ám a tér és a geometria a priori természetére vonatkozó tétele ennek ellenére helyes: az eukleidészi és nem eukleidészi geometriák közös axiómái, valamint a projektív geometria valóban „a priori"-ak.[6]

A jelen tanulmányban azonban nem a filozófiai irodalomban ezzel kapcsolatosan jelen lévő vitát fogom bemutatni,[7] hogy ezáltal korrigáljam a fenti folklórt. Ehelyett – az antikantiánus álláspontokon túl a prokantiánus kompromisszumos megoldásokkal szemben is – amellett érvelek, hogy a geometriára vonatkozó kanti elképzelések helyes olvasata nem csupán megengedi azt az értelmezést, amely az eukleidészi geometriát tekinti az egyetlen kanti értelemben vett a priori geometriának, hanem nyomós érveket hozhatunk fel amellett, hogy *ez az interpretáció a közvetlen és egyedüli folyománya Kant helyes olvasatának.*

Az eukleidészi geometria kanti értelemben vett aprioritása melletti érvelést azonban meg kell előznie a megválaszolandó kérdés tisztázásának.

6 Vö. Russell 1897. (Különösen 6. és 164–177.)

7 A geometriával kapcsolatos kanti nézetekről, és az azok elavultságról vagy aktualitásáról folyó vitáról jól használható elemzéseket találhatunk pl. Büchernél (1987) vagy Natterernél (2003).

Annak következtében ugyanis, hogy a témával foglalkozó szerzők többnyire saját filozófiai prekoncepciójuk jegyében közelítenek tárgyukhoz, nemcsak a válasz, hanem maga a megoldandó probléma is elmosódottá válik: az helytelenül fókuszált („defókuszált") és a különböző álláspontok sokasága[8] alapvetően ebből a pontatlan megközelítésből fakad. Ennek megfelelően tanulmányom első részében a tulajdonképpeni probléma pontos megragadására törekszem, két antikantiánus – egy empirista és egy konvencionalista jellegű – ellenérv eltávolításával. Ezen ellenérvek viszonylag egyszerű kiiktatása után juthatunk el a tulajdonképpeni problémához, amelynek tárgyalása már annak természetéből következőleg jóval nehezebb: kezelése során ugyanis egy *nem nyelvi, nem fogalmi, nem logikai, „szubjektív" mozzanatot kell átfordítnunk nyelvi-fogalmi-logikai-interszubjektív keretbe*. E nehézség ellenére tanulmányunk második részében megpróbálunk *diszkurzív érveket megfogalmazni az eukleidészi geometria kanti értelemben vett a priori jellege mellett.*

Megjegyezzük még, hogy azon álláspont tekintetében, ahová tanulmányunk első részének végén eljutunk majd, és ahonnan a második rész kiindul, az elmúlt évtizedek vonatkozó szakirodalmában egyetértés van, azaz ez az irodalom nem rabja már az empirista és konvencionalista antikantiánus érveknek. Mivel azonban ezek az utóbbiak ennek ellenére még ma is (és filozófuskörökben is) erősen tartják magukat, mindenképpen szükség van arra, hogy foglalkozzunk velük.

II. A probléma helyes fókuszálása

II. 1. A nem eukleidészi geometriákra hivatkozó empirista antikantiánus ellenérv érvénytelensége

Figyelembe véve azt, hogy a modern matematikában az eukleidészi geometria mellett számtalan más, vele összeegyeztethetetlen geometria létezik, *Kant empirista kritikusai* azt a kérdést szegezik szembe Kanttal, hogy vajon e sok geometria szerint melyik az, amely „helyesen" írja le a

[8] Az általunk is említett szerzők egy része, valamint a témával foglalkozó néhány további szerző álláspontjáról rövid áttekintést ad a kanti térfelfogást érintő elemzéseiben Natterer 2003 (különösen 118–136., 403–404.)

valóságot, vagyis melyik az, amely „igaz"? Kant számára ugyanis csak egy geometria létezett, foglalhatjuk röviden össze ezen érv lényegét, és ebből adódóan az számára szükségképpen „igaz"-nak tűnt. Mivel azonban kiderült, hogy számos geometria lehetséges, az „igaz" geometria eldöntendő kérdéssé vált, és e kérdésre választ csupán empirikus vizsgálatokkal, azaz a posteriori kaphatunk, ami – állítják e nézet képviselői – nyilvánvalóan ellentmond a geometria a priori jellegére vonatkozó kanti tézisnek.[9]

Ez a látszólagosan vitathatatlan és a kanti tanítást mintegy „kiütő" érv azonban több sebből is vérzik. S nemcsak arról van szó, hogy a kanti a priori fogalmának felületes értelmezésén nyugszik, hanem arról is, hogy sem ismeretelméletileg, sem pedig tudományfilozófiailag nem állja meg a helyét.

Egyrészt nyilvánvaló, hogy ebben az érvelésben az igazság empirikus fogalma szerepel, és a „melyik geometria az igaz?" kérdés azzal a kérdéssel azonos, hogy melyik geometria írja le helyesen (az adott kontextusban fizikainak tekintett) empirikus „valóság"-ot. Erről szól a nevezetes háromszögelési példa, illetve az a már Lobacsevszkijnél is megjelenő elképzelés, mely szerint a csillagok parallaxisának elemzésével empirikusan ki lehet választani az „igaz" geometriát.[10] Ezek közül most az egyszerűség kedvéért csak a háromszögelési módszert ismertetjük. Eszerint egy elég nagy háromszög szögeit megmérve eldönthető, hogy vajon az eukleidészi vagy pedig valamely más geometria érvényes-e a fizikai valóságban, hiszen az egyenes oldalú háromszög szögeinek összege csupán az eukleidészi geometriában egyenlő 180 fokkal. Mivel a fizikai tér közelítőleg eukleidészinek tűnik, hangzik az érvelés, mindenképpen nagyméretű háromszöget kell vizsgálnunk, oly módon, hogy az egymástól távol eső csúcsokból fényjeleket küldünk ki a másik csúcsokban lévő megfigyelőkhöz, és minden csúcsban megmérjük a beeső fénysugarak szögét. Ha ezek összege kisebb lesz 180 foknál, a Bolyai–Lobacsevszkij-féle negatív, hiperbolikus geometria érvényes, ha nagyobb, akkor pedig a pozitív görbületű szférikus geometria vagy az elliptikus geometria.

Csakhogy könnyen belátható, hogy ez az érvelés abszurd. Nem kell ugyanis különösebb gondolati erőfeszítést tennünk annak megértéséhez,

[9] Vö. pl. Parsons 1964, 82.; Hopkins 1973, 5.
[10] Pl. Lobacsevszkij 1829/30, 251–254. (Uő. 1898, 22–24.)

hogy a fény nem terjed szükségképpen egyenesen a vizsgálat alatt, és így a 180 foknál kisebb vagy nagyobb szögösszeg adódhatna abból is, hogy a fény pályája eltért az egyenestől. A problémának némileg mélyebben utánagondolva pedig világossá válik, hogy az előbbiekben vázolt kísérleti eljárás rejtett, *minden tapasztalati vizsgálódást megelőző*, és ebben az értelemben – tehát *nem kantiánusan!* – a priori előfeltevése, hogy a fény pályája egyenes, és magának a fizikai világ geometriájának ily módon történő vizsgálata ezen nem-tapasztalati posztulátum nélkül értelmetlen volna. Így e posztulátum nélkül a 180 fokos szögösszeg is értelmezhető oly módon, hogy a geometria valójában Bolyai–Lobacsevszkij-féle, csak éppen a fénypálya eltért a Bolyai–Lobacsevszkij-féle egyenestől, és ezért mértünk mondjuk 179 fok helyett 180 fokot, mint amiképpen 179 fokos szögösszeg esetén is fenn fog állni annak lehetősége, hogy a tér eukleidészi, és csupán a fénypályának az egyenestől való eltérülése miatt kaptunk 180 foknál kisebb összeget.

Mindez logikusan végiggondolható, de tulajdonképpen erre sincs szükség, amennyiben Henry Poincaré *Tudomány és föltevés* című műve óta ez az összefüggés a filozófiai irodalom közkincséhez tartozik, mint amiképpen az az ezen alapuló Poincaré-féle tétel is, amely szerint az empirikus világ tekintetében sohasem egyedül a geometriára magára vonatkozó hipotéziseinket teszteljük, hanem a geometriára és a fizikai testek viselkedésére vonatkozó feltevéseinket együttesen.[11] Ennek következtében pedig nem várt eredmény esetén ugyanúgy módosíthatjuk a geometriai hipotézis megőrzése mellett a fizikai hipotéziseket, mint megfordítva.[12]

De mi a helyzet az általános relativitás elméletével, kérdezheti valaki. Vajon ez az elmélet nem arról szól-e, hogy a tér nem eukleidészi jellegű, és a csillagok fényének elhajlása a Nap közelében vajon nem azt bizonyítja-e, hogy e tekintetben „igaza" van? Mármost a háromszögelési kísérlettel kapcsolatos előbbi fejtegetésünk most is alkalmazható: ez az eredmény valóban értelmezhető úgy is, hogy a tér a Nap környezetében nem eukleidészi, de úgy is, hogy a tér maga ugyan eukleidészi, de a

[11] Vö. Poincaré 1908. (Poincaré és Kant viszonyához vö. még pl. Schirn 1991; Godlove 2009.)

[12] Könnyű belátni, hogy Poincaré e tézise a Duhem–Quine–Lakatos Imre-féle empirikus aluldetermináltsági tétel egyik alesete.

fénypálya valamily fizikai létező – pl. a gravitációs erőtér – hatására (amely utóbbi a magyar szóhasználattól eltérően nem „tér", hanem a helyes nemzetközi szóhasználat szerint „mező"!) eltér az egyenes pályától. S ezzel maga Einstein is tisztában volt, amikor *Geometria és tapasztalat* című művében arról ír, hogy a fizikai világ geometriája csak akkor válhat tapasztalati kérdéssé, ha megadjuk azt a nem tapasztalati jellegű szabályt, amely a matematikai geometriát összeköti a megfigyelt fizikai jelenségekkel, és ezáltal megteremti a gyakorlati geometriát. Einstein maga ezt a szabályt a merev testek létezésének feltételezésében és a merev testeknek a geometriával való összeköttetésében látja. Igaz, ennek során anynyiban kritizálja Poincarét, hogy csak *sub eternis* (értsd: az elvont filozófia síkján) ad neki igazat, és úgy véli, hogy *egy racionális fizika felépítéséhez* elkerülhetetlen a merev testek létezésének feltételezése, valamint a geometria és a merev testek egymáshoz kapcsolása. Ennyiben Einstein szerint a fizika megalkotása során már elvész a geometria megválasztásának lehetősége.[13] Csakhogy az, *hogy mi a racionális fizika, nem empirikus, hanem tapasztalat előtti kérdés*, amelyről kísérletek segítségével sohasem dönthetünk. Poincarét követve pedig mindig választhatjuk azt az opciót, amely szerint ésszerűbb az eukleidészi geometria megőrzése – akár még a merev testek létezésére vonatkozó hipotézis feladása révén is –, mint annak elvetése. E tekintetben Einstein fizikája csupán annyit bizonyít, hogy a nem eukleidészi geometriák segítségével jól rendezhetjük a fizikai tapasztalatot, és azok alkalmasak arra, hogy segítségükkel hatékony előrejelzéseket tegyünk, de közvetlenül nem vonatkozik a tér, sem pedig a téridő geometriájára, mint amiképpen arról sem világosít fel bennünket, hogy mi a tér és az idő. *Ezen utóbbiak filozófiai fogalmak, és annak értelme, hogy mit is jelent az, amit a fizikai elmélet téridőként jelöl meg, erősen függ attól, hogy a térnek és az időnek milyen filozófiáját követjük.*

Mivel e problémakör részletesebb elemzésére a jelen tanulmány keretei között nincs hely, az esetleg kételkedő fizikus olvasók számára a rövidség kedvéért hadd idézzük még a neves amerikai fizikusnak, N. David Merminnek a relativisztikus téridőre vonatkozó, a *Physics Today* 2009. májusi számában megjelent alábbi sorait:

[13] Einstein 2005. (Különösen 288., 290.)

> A fizikusok rossz szokása, hogy legsikeresebb absztrakcióikat a fizikai világ valódi sajátosságainak tekintik. [...] A téridő eszköze oly hatékonynak bizonyult, hogy gyakran eldologiasítjuk ezt az absztrakt könyvviteli struktúrát, azt állítva, hogy egy ilyen négy- (vagy néhány fizikus társunk számára tíz-) dimenziós kontinuumban élünk.[14]

Mermin alapján tehát az einsteini téridőt a maga görbültségével értelmezhetjük csupán absztrakciónak is, amelynek görbültsége – azaz nem eukleidészi jellege – nem a tér önmagában való sajátossága, hanem csak teoretikus leírás. Ennek nyomán pedig a relativitás elmélete csak akkor kerülhetne ellentmondásba a kanti elmélettel, ha valamilyen módon igazolni lehetne, hogy térideje a fizikai objektumokhoz hasonló entitás, azonban ilyen igazolás nem csupán nem áll rendelkezésünkre, hanem – mint láttuk – Poincaré alapján eleve lehetetlen.

II. 2. A geometria konvencionalitására hivatkozó ellenérv eltávolítása

Az empirista ellenérv eltávolítása természetesen még nem vonja maga után a kanti tanítás és a nem eukleidészi geometriák logikai lehetősége közötti konfliktus eltávolítását. Hiszen az, hogy „a tapasztalati világ geometriája" fogalmának csak adott, a priori előfeltevések bázisán van értelme, nem jelenti a geometria kanti értelemben vett a priori voltát, mivel itt nem a kanti értelemben vett, szükségszerű a prioriról van szó, hanem csupán arról, hogy még a tapasztalati vizsgálatok megkezdése előtt szükségszerűen el kell köteleznünk magunknak bizonyos nem tapasztalati jellegű előfeltevések mellett. Ez pedig gyökeresen eltér a kanti a priori fogalmától.

Az elköteleződésnek ez a nem kantiánus, a priori szükségszerűsége valójában abból fakad, hogy a geometriák sokasága által megnyílt logikai teret előbb le kell zárnunk ahhoz, hogy a tapasztalati világ geometriájáról értelmesen beszélhessünk. Poincaré szellemében vagy előre – és ebben az értelemben „a priori" – ki kell kötnünk egy adott geometriát, vagy a

[14] Mermin 2009, 9.

geometriát valamely fizikai hipotézishez kell rendelnünk. Így például abban az esetben, ha az egyenest és a fény pályáját kötjük össze, beszélhetünk fénygeometriáról, ha viszont – a la Einstein – posztuláljuk a merev testek létezését, és a geometriát ezekhez kapcsoljuk, a merev testeken alapuló geometriához jutunk. Azaz a fentiek szerint megkívánt tapasztalat előtti előfeltevés arra szolgál, hogy a geometriák sokságából adódó, s emiatt parttalanná váló lehetőségeket redukáljuk az empirikus vizsgálódások lehetővé tétele érdekében, és a tudomány egységes művelése érdekében a kutatóknak meg kell egyezniük e tekintetben.

Ez a geometriák logikailag adott pluralizmusából adódó a priori tehát nem szükségszerű, hanem csak megegyezés, „konvenció" révén tehető kötelezővé: többek között ennek felismerésén is alapul Poincaré konvencionalista tudományfilozófiai álláspontja.[15] Csakhogy a geometria tekintetében ez a konvencionalista álláspont ugyanúgy radikális tagadása a geometria a priori voltára vonatkozó kanti tézisnek, mint az empirista ellenérv. A kanti értelemben vett a priori ugyanis elkerülhetetlen, szükségszerű – s ebben az értelemben bár emberi, de „objektív" – adottság, amely tekintetében nincs lehetőségünk választásra. Vagyis oda jutottunk, hogy az empirista ellenérvet megsemmisítő, most tárgyalt konvencionalista tézis látszólagosan ugyanúgy ellentétben áll a geometria kanti értelemben vett a priori természetével, mint az empirista ellenérv.

Ám a kovencionalista álláspont elemzésével mégiscsak közelebb jutottunk a kanti tézis és a nem eukleidészi geometriák viszonyával kapcsolatos tulajdonképpeni problémához, mint a felületes és alapvetően hibás empirista ellenérvet tárgyalva. Ha ugyanis a kanti a priori – a gyakori félreértésnek megfelelően – olyan logikai a priori volna, amely minden más logikai lehetőséget kizár, és ebben a logikai értelemben jelentené az eukleidészi geometria szükségszerű voltát, akkor a konvencionalista álláspont kivédhetetlenül megcáfolná Kant tanítását. Ugyanis a geometria a priori voltára vonatkozó kanti tétel ez esetben azzal az állítással volna ekvivalens, hogy logikai szükségszerűséggel kizárólagosan az eukleidészi geometria az egyetlen lehetséges geometria.

[15] Poincaré 1908.

II. 3. Az eukledićszi geometria kantiánus értemben vett a priori volta mint nem logikai a priori

A kulcskérdés e tekintetben tehát az, hogy *mit jelent Kantnál az eukleidészi geometria a priori szükségszerűsége? Logikai szükségszerűséget? Vagy a szükségszerűségnek van más fajtája is, mint a logikai, és ezért egy adott geometria szükségszerű lehet annak ellenére is, hogy logikailag nem az?*

Ezzel összefüggésben *A tiszta ész kritikája* második kiadásában a következőket olvashatjuk:

> *Minthogy ugyanis azt látták, hogy a matematikusok következtetései mind az ellentmondás tétele fonalán haladnak (amint ezt minden apodiktikus bizonyosság természete megköveteli), elhitették magukkal, hogy az alaptételeket is az ellenmondás tételéből lehet megismerni, amiben nagyot csalódtak; mert a szintetikus tétel megismerhető ugyan az ellenmondás tétele alapján, de csak ha más szintetikus tétel előzi meg, amelyből következtethető, nem pedig magában.* (Bevezetés V/1 – B 14.)[16]

Másrészt tudjuk azt, hogy Kant szerint:

> *A geometria oly tudomány, amely a tér tulajdonoságait szintetikusan s mégis* apriori *határozza meg.* (I. 3.§ – B 42.)[17]

Mármost a fenti két állítás összevetéséből egyértelműen következik, hogy a geometria mint tudomány csak annyiban határozhatja meg a tér tulajdonoságait az ellentmondás elve alapján (azaz logikailag), amennyiben szintetikus ítéletek előzik azt meg. (Annak, hogy e szintetikus ítéletek egyben a prioriak is, itt nincs jelentősége.) Ez pedig azt jelenti, hogy Kant szerint az axiómák – mint a tér geometriájáról hozott szintetikus ítéletek – sohasem vezethetőek le az ellentmondás elvéből, hiszen azok éppen azért axiómák, mert semmiféle ítélet sem előzi meg őket. W. R. de Jong szavaival Kantnál:

[16] Kant 1913, 35.
[17] Kant 1913, 51.

> A matematikai ítéletekre mindig az ellentmondás elve alapján kell következtetni, de nem ezen elvből erednek. Azért szintetikusak, mert a matematika saját alapelveiből (axiómáiból) lehet kikövetkeztetni, illetve levezetni őket, és ezek mint axiómák szintetikusak.[18]

Ebből pedig kifejezetten az következik, hogy ha az eukleidészi geometria párhuzamossági axiómája valóban axióma (azaz valóban független az eukleidészi geometria többi axiómájától), akkor ahhoz az ellentmondás elvéből magában sohasem juthatunk el, azaz tagadása nem vezet ellentmondásra. Így itt *Kant de facto a nem eukleidészi geometriák logikai lehetőségét állítja, azaz az eukleidészi geometria a priori voltára vonatkozó kanti kérdés semmiképpen sem lehet azonos azzal az állítással, hogy ez a geometria az egyetlen logikailag lehetséges geometria.*[19]

Megjegyzendő, hogy Kant nem csupán a geometriai axiómák kapcsán, hanem a geometriai bizonyítások esetében is hivatkozik a szemléletre,[20] és a geometria a priori jellegével kapcsolatos vitákban a kanti elmélet ezen mozzanata is hangsúlyosan megjelenik (pl. Hintikkánál vagy M. Friedmannál, vagy a velük e tekintetben vitatkozó Anja Jauerningnél).[21] Ez azonban jelen tanulmányunk – és különösképpen most következő érveink – szempontjából érdektelen.

II. 4. A tulajdonképpeni – „helyesen fókuszált" – probléma

Ha viszont nem a logikai szükségszerűség értelmében, akkor miképpen a priori a tér geometriája Kantnál?

Erre a kérdésre az előbbi Kanttól idézett sorok *nem adnak* választ. Viszont ha megtaláljuk nála a kulcsot megválaszolásához, akkor e soroktól függetlenül is világossá válhat, hogy itt nem logikai a prioriról van szó.

Láttuk, az alaptételek nem logikai eredetére vonatkozó kanti tételből következik a logikailag lehetséges geometriák pluralizmusa (mégpedig

[18] Jong 2008.
[19] Vö. pl. Carson 1997.
[20] Pl. Jauernig 2013
[21] Lásd az említett szerzők korábban hivatkozott írásait.

sokkal radikálisabban, mint Bolyainál, Lobacsevszkijnél vagy Riemannál, amennyiben Kant állítása valamennyi geometriai axióma ellentétjére történő cserélhetőségét maga után vonja). Mindezek nyomán az eukleidészi geometria a priori voltára vonatkozó kanti tétel magában foglalja, hogy ez az utóbbi geometria a sok logikailag lehetséges geometria közül valamily módon kitűnik – azaz egyedi, más, mint a többi geometria.

Mármost Kantnál teljesen világos, hogy a tér mint a külső érzék (az érzéki szemlélet) tiszta formája nem az intellektualitás, hanem az érzékek szintjéhez tartozik. Amikor a geometria tudománya mint intellektuális tevékenység megismeri e tér tulajdonságait, akkor külső érzékünk tiszta formájának tulajdonságát ismeri meg, s éppen ezért a priori. Nem a tapasztalat által megtöltött tér objektumainak (pl. a fényháromszögek vagy a merev testek) geometriájáról, hanem külső érzéki szemléletünk tiszta formájának mint olyannak a megismeréséről van szó. A kérdés így tehát az, hogy érzéki szemléletünk tiszta formájához hozzátartozik-e elválaszthatatlanul az eukleidészi (vagy esetleg egy másik, pl. a projektív) geometria vagy sem.

Ha a tér mint a külső érzék tiszta formájának szemléletére bevezetjük (a Kant által nem használt) *„térszemlélet"* fogalmát, akkor e fogalmat használva a geometria kanti értelemben vett aprioritása akkor és csak akkor fog fennállni, ha egy és csak egy olyan konkrét geometria létezik, amellyel térszemléletünk összhangban van. Amennyiben pedig állításunk az, hogy ez a konkrét geometria az eukleidészi, akkor ebből az is következik, hogy a nem eukleidészi geometriák – *azoknak eukleidészi modelljeitől eltekintve!* – összeegyeztethetetlenek térszemléletünkkel. Ezért elfogadva azt az általában nem vitatott állítást, hogy az eukleidészi geometria harmonizál térszemléletünkkel, az ezen geometria kanti értelemben vett a priori voltára vonatkozó kérdés az alábbival válik ekvivalenssé: *összeegyeztethetőek-e térszemléletünkkel a logikailag egyébként lehetséges nem eukleidészi geometriák vagy sem?*

Az így fókuszált kérdés kiemeli a problémakört mind abból az empirista, mind pedig abból a logicista-konvencionalista keretből, amelybe e problémakör az eredeti kanti gondolatok félreértelmezésének következtében került. *És ez az a pont, ahol az utóbbi évtizedek e tárgykörrel foglalkozó Kant-irodalma az ellentétes álláspontok ellenére egyetért, és azonos a most kifejtettel.*

Így még az olyan antikantiánus megközelítések is, mint amilyen Hintikkáé vagy a korai Friedmané, elismerik, hogy a geometria aprioritása Kantnál nem a logikai szükségszerűséget jelenti, hanem a szemlélet fogalmához kapcsolódik. Csakhogy ők éppen ezért tartják idejétmúltnak, a tudományok fejlődése által meghaladottnak tanítását. Velük szemben viszont Emily Carson, Johannes Lenhard és Frode Kjosavik joggal mutat rá arra, hogy a „szemlélet" kanti koncepcióján nem léphet túl a tudomány, és a geometria aprioritásával kapcsolatos vizsgálódásokat továbbra is arra a kanti tézisre kell alapoznunk, mely szerint a tér a tiszta érzéki szemlélet külső formája.[22] Frode Kjosavik találó megfogalmazásában:

> *Csak akkor lehet a geometria a tér elmélete, szemben a csupán nominálisan „terek"-ként meghatározott általános struktúrákkal, ha a geometriai axiomatikus rendszerek szemantikája – vagy modellálása – kapcsolatban áll a kanti szemlélettel.*[23]

Azaz definiálhat a modern matematika a halmazokon metrikákat, és nevezheti az így ellátott struktúrákat tereknek, a rájuk vonatkozó elméletet pedig geometriának, ezek még a kanti értelemben nem lesznek terek és geometriák, csupán olyan spekulatív konstrukciók, amelyek logikai lehetőségét Kant sohasem zárta ki. *Azaz kanti értelemben a hiperbolikus és a szférikus geometria mint logikailag lehetséges gondolati konstrukció csak annyiban tekinthető „geometriá"-nak, amennyiben hasonlít a Kant szerint szemléletünknek egyedül a priori megfelelő eukleidészi geometriához, annak modifikációja.* (A kanti szemlélet és az eukleidészi geometria közti megfelelés kérdését – melynek tekintetében az előbb idézett Kjosavik már bizonytalan – jelen tanulmány III. részében vizsgáljuk.)

II. 5. A kérdés további pontosítása

Most azonosított kérdésünk pontos tartalmának meghatározásához azonban ki kell térnünk még arra is, hogy mit értünk a nem eukleidészi

[22] Carson 1997; Lenhard 2006; Kjosavik 2009.
[23] Kjosavik 2009, 26.

geometriák és térszemléletünk összeegyeztethetetlenségén. Ugyanis az eukleidészi térben megadhatóak olyan nem eukleidészi struktúrák, illetve a nem eukleidészi geometriák olyan eukleidészi modelljei, amelyek nem eukleidészi jellegük ellenére eukleidészi módon is leírhatóak, és így összeegyeztethetőek az eukleidészi szemléletmóddal. Láttuk például, hogy ide tartozik egy olyan háromszög, mely szögeinek összege nem 180 fok. Ugyanis az eukleidészi geometria csak az egyenes oldalú háromszögre követeli meg a 180 fokos szögösszeget, és ezért egy ilyen háromszög ugyanúgy leírható görbe oldalú eukleidészi háromszögként, mint egyenes oldalú, nem eukleidészi háromszögként. Ezen összefüggésben így fönti kérdésünk akként vetődik fel, hogy *összeegyeztethető-e térszemléletünkkel a „görbe" egyenesként való átértelmezése*, azaz hogy relativizálható-e már a szemlélet szintjén (tehát nem elvont gondolati konstrukciókban) a „görbe" és az „egyenes" fogalma. De ennél a mozzanatnál is alapvetőbb az a tény, hogy saját jogú nem eukleidészi tereknek csak azok a geometriai terek tekinthetőek, amelyek nem a háromdimenziós eukleidészi geometria alrendszerei, és amelyek ezért csupán a mesterségesen, gondolatilag megalkotott, (tehát az érzéki szemlélet hatókörén kívüli, elvont) háromdimenziósnál több dimenziós eukleidészi terekben modellálhatók. A térszemlélet és a nem eukleidészi geometriák összeegyeztethetőségre vonatkozó kérdés az „egyenes" és a „görbe" szemléleti relativizálhatóságának kérdésén túl pedig elsődlegesen az ilyen, *a háromdimenziós tér részstruktúráját nem képező nem eukleidészi struktúrák és térszemléletünk összeegyeztethetőségére vonatkozik*. Ennek következményeképpen azok a háromdimenziós térstruktúrák, illetve modellek (így például a Riemann-geometria populáris gömbhéjmodellje vagy a Bolyai–Lobacsevszkij-féle geometria Beltrami–Klein-féle modellje), amelyek mind eukleidésziként, mind nem eukleidésziként leírhatók, e tekintetben irrelevánsak.

III. Érvek az eukleidészi geometria kanti értelemben vett aprioritása mellett

III. 1. A helyesen fókuszált probléma természete és a heideggeri „tájék"

Térszemléletünk, a térrel kapcsolatos élményeink olyan elválaszthatatlanul hozzánk tartozó élmények, amelyekről ugyan megpróbálhatunk beszámolni másoknak, ám sohasem adhatjuk át másnak. Egy belső vizuális élményt a festő lefesthet ugyan, és ily módon azt mások számára is láthatóvá teheti, de egyrészt semmi garancia sincs arra, hogy ez a festményben külsővé tett élmény valóban az eredeti, belső élményt adja vissza, másrészt nincs jelentősége tárgykörünk szempontjából, amennyiben Kantnál az üres, a „tiszta", a tárgyak által meg nem töltött tér tulajdonságairól van szó. Nagyobb relevanciája van már annak, ha valaki azt állítja magáról, hogy az ő saját térszemlélete összeegyeztethető a nem eukleidészi geometriákkal. Ez, ha valóban igaz, kivédhetetlen ellenérvnek tűnik az eukleidészi geometria aprioritására vonatkozó tétellel szemben, ám nem ellenőrizhető, hiszen nem válhatunk a másikká, hogy az ő térszemléletével tekintsünk a nem eukleidészi geometriákra. Talán egy hosszú diszkusszió során meggyőzhetjük a másikat arról, hogy a nem eukleidészi geometriák eukleidészi modelljeinek szemléletes volta az, ami megtéveszti, hiszen e modellek éppen eukleidészi jellegüknél fogva megfelelnek az eukleidészi geometriáknak is, ám lehet, hogy e lehetőséget is kizárva ragaszkodni fog eredeti állításához: ahhoz, hogy az ő térszemlélete minden ellenérv ellenére is összeegyeztethető a nem eukleidészi geometriákkal.

Némileg könnyebb e szempontból kezelni az olyan empirikus pszichológiai vizsgálódásokat, amelyek szerint a gyermekek és a geometriailag nem képezett személyek térszemlélete állítólagosan nem eukleidészi. Ugyanis a mindennapi életben nem geometriailag tekintünk a térbeli viszonyokra. Heidegger leírása e tekintetben meggyőző: környezetünk elsődlegesen nem geometriai térként, hanem értelemmel telített, inhomogén „*tájék*"-ként jelenik meg számunkra, és az csak a nivelláló-homogenizáló, „szemlélődő" beállítódásban válik geometriaivá.[24] Mindezek

[24] Heidegger 1989, 223–240.

nyomán az erre vonatkozó heideggeri elemzés semmiképpen sem állítható szembe a kanti koncepcióval. Sőt, az a heideggeri állítás, mely szerint a geometriai értelemben vett homogén tér csak a karteziánus-teoreitkus, homogenizáló beállítódásban adódik, s nem a világ magában való tulajdonsága, közelebb áll Kanthoz, mint a tér realista-objektivista felfogása – még akkor is, ha persze mindez egy olyan ontológiában jelenik meg nála, amely elutasítja a Kantot is jellemző szubjektum-objektum dualizmust, s amelynek számára a tér nem „projekció", hanem a „világban-benne-lét" struktúramozzanata.[25] Mindenesetre életvilágunk sem nem eukleidészi, sem nem nem eukleidészi, mivel egyáltalában nem geometriai. Mindez azonban nem jelenti azt, hogy az így adódó térélmény a geometria szempontjából elemezve ne felelhetne meg az eukleidészi geometriának.

Az empirikus lélektani vizsgálódásoknak egyébként is alapproblémája, hogy a vizsgálatokat végző személy a geometriailag nem iskolázott kísérleti alanyok beszámolóit geometriaivá fordítja, és ha ennek során történetesen bizonyos struktúrákat mondjuk hiperbolikus geometriaként azonosít, és ennek nyomán arra a következetésre jut, hogy az alanyok térszemlélete a negatív görbületű geometriákat követi, ez még nem zárja ki azt, hogy ezen struktúrákat ne lehetne az eukleidészi tér objektumaiként, különböző görbületű idomok eukleidészi rendszereként értelmezni. Ezért az ilyen kísérletek eredménye mindaddig tendenciózus lesz, amíg az utóbbi lehetőséget következetesen ki nem zárjuk, hiszen – mint láthattuk – az eukleidészi tér olyan objektumai, amelyek a nem eukleidészi geometriákkal is leírhatók, kérdésünk szempontjából irrelevánsak. (Csak zárójelben: az egyik legújabb ilyen – egy Amazonas menti indián törzs körében végzett – vizsgálat fel sem veti ezt a problémát, mivel eredménye éppen a kanti tanítást támasztja alá.[26])

Hasonlóképpen nem szólnak az eukleidészi geometria ellen a vizuális térre jellemző „perspektivikus torzulás"-ok sem. *Ha egy kockát különböző módon látunk is különböző perspektívákból, azt minden geometriai képzettség és gondolkodás nélkül is kockaként azonosítjuk. Ebből azonban nem következik, hogy az a látvány, amiképpen a kocka különböző perspektívákban megjelenik, ne az eukleidészi geometria törvényeinek felelne meg, és ne volna e geometria segítségével kiszámítható.*

[25] Uo. 223.

[26] Izard és munkatársai 2011.

Végül újra hangsúlyoznunk kell azt a tényt, hogy Kantnál nem a térben található empirikus objektumok struktúráiról van szó, hanem a teret mint „tiszta" formát, mint minden empíriától mentes szemléletet kell vizsgálnunk.

Mindezek következtében a tanulmányunk tárgyát képező kérdés helyes fókuszálásával paradox módon olyan homályos tartomány peremére jutottunk, ahol csupán az introspekcióra, mások verbális beszámolóira, valamint a kísérleti szituációkban végrehajtott cselekedetekre hivatkozhatunk, s ezen az úton igen nehéz általánosan érvényes, interszubjektív filozófiai kijelentéseket kapunk. A következőkben azonban nem lépünk be e homályos tartományba, hanem megpróbálunk eleve olyan, nem az instrospekción alapuló, interszubjektív, jól diszkutálható érveket felhozni térszemléletünk eukleidészi volta mellett, amelyek ugyan nem lehetnek oly hatékonyak, mint az empirista és a konvencionalista ellenérvet eltávolító korábbi érvek, ám ezzel együtt mégiscsak határozottan alátámasztják az eukleidészi geometria aprioritására vonatkozó kanti tételt.

III. 2. Érvek az eukleidészi geometria kanti értelemben vett kitüntetettsége mellett

Az eredeti kanti szövegek alapján tehát nehezen vitatható, hogy a német filozófus logikailag lehetségesnek tartotta a nem eukleidészi geometriákat, és a geometria aprioritását állító tétele a szemlélet és a geometria viszonyára vonatkozott. Ugyanakkor még az ezt hangsúlyozó szerzők egy része (közöttük a korábbiakban idézett Kjosavik) is bizonytalan abban a tekintetben, hogy szemléletünket valóban az eukleidészi geometria jellemzi-e. Ezért a következőekben megpróbálunk néhány érvet felhozni ezen állítás mellett.

III. 2. 1. Tapasztalati-fenomenális világunk eukleidészi jellege

Mindazon tárgyak, alakzatok és struktúrák, amely tapasztalati-érzéki világunkban találhatóak, leírhatóak az eukleidészi geometria segítségével. Még soha, egyetlenegy alkalommal sem sikerült olyan nem pusztán gondolati tárgyat, felületet vagy alakzatot konstruálni, amelyre ne volnának érvényesek az eukleidészi geometria törvényei. Mint láttuk, e szempontból közömbös az, hogy e struktúrák némelyike nem eukleidészi módon is leírható. Így például egy olyan fényháromszögre, amely szögeinek összege nem 180 fok, szintén érvényes az eukleidészi geometria, hiszen az tekinthető egy nem egyenes, hanem „görbe" oldalú eukleidészi háromszögnek. S bár egy gömbfelszín geometriája leírható kétdimenziós nem eukleidészi geometriaiként, ugyanezen gömbfelszín egyben a háromdimenziós eukleidészi tér eukleidészi alakzata. E tekintetben a kanti tanítást *az és csak az* cáfolhatná meg, ha sikerülne előállítani olyan nem tisztán teoretikus, érzéki-vizuális alakzatot vagy képet, amelyre az eukleidészi geometria szabályai semmiképpen sem volnának érvényesek. (E vonatkozásban ne felejtsük el: a relativitáselmélet térideje egy igen komplex gondolati konstrukció, és nem érzéki-vizuális alakzat.) Megjegyzendő persze, hogy ez az érv nem bizonyító jellegű. Csupán arra mutat rá, hogy a tapasztalati-érzéki, és ebben az értelemben nem teoretikusan konstruált, hanem valós világ élménye összhangban van a tér a priori eukleidészi jellegére vonatkozó kanti tanítással – szemben azokkal az állításokkal, amelyek az eukleidészi nem egyenes struktúrákat tévesen annak jeleként értelmezik, hogy a tapasztalati-érzéki világ nem eukleidészi.[27]

III. 2. 2. Az eukleidészi geometria, mint „görbületmentes" geometria

Az eukleidészi geometria a nem eukleidészi geometriák mércéjéül szolgál annyiban, hogy ezek tekintetében görbült térről beszélünk, vagy például a nem eukleidészi tér egyenese mentén haladó csillagfény pályáját görbültnek tekintjük. S itt sem matematikailag, sem pedig térszemléletünk szempontjából nem önkényesen járunk el. A pozitív és a negatív görbületű tér abszolút módon különbözik egymástól, és nem konvención múlik, hogy hol jelöljük meg a pozitív görbületből a negatív görbületbe történő átváltást. Ennek következtében a nulla görbületű – tehát az eukleidészi

[27] Tipikusan ezt a félreértelmezést követi el pl. Craig 1969.

tér – speciális helyzete nem önkényes, azaz nem megegyezéses alapon tekintjük éppen ezt a teret görbületmentesnek. A térgörbület valami olyan, ami fokozható és csökkenthető, illetve kivonható, eltüntethető e terekből, és e kivonás révén éppen az eukleidészi teret kapjuk meg. Igaz, mindez elvont spekulatív matematika, de jelen van mögötte az a tény, hogy szemléletünkben az egyenes és a görbe határozottan különbözik egymástól. S amíg az egyenes jelleg jól meghatározott tulajdonság, a görbületnek előjele és intenzitása van, amely ezért a kanti aspektusból már valami olyan, amit belevittünk a tiszta térbe, amitől annak érdekében, hogy a teret a maga „tisztaságában" megkapjuk, el kell vonatkoztatnunk. Viszont az e „megtisztítás" révén adódó teret mint a nulla görbületű, vagyis eukleidészi teret kapjuk meg, s Kantnál az eukleidészi geometria éppen e megtisztított, a külső érzéki szemlélet formáját jelentő térre vonatkozik. (Persze a tér e „megtisztításában" eljuthatunk a már nem geometriai jellegű, minden geometriai összefüggéstől megfosztott absztrakt ponthalmazokig is. Ezek az utóbbiak azonban már teljesen elvont konstrukciók, ami egyáltalában nem tekinthető külső szemléletünk tiszta formájának leírásaként, és – a Frode Kjosaviktól előbb idézett sorok értelmében – geometriaként sem.)

III. 2. 3. Az „egyenesség" fogalmának a priori meghatározottsága

Az eddigi két érv csupán bevezető jellegű érv volt, melyek határozottan plauzibilissé teszik az eukleidészi geometria kanti értelemben vett kitüntetettségét. Kulcsfontosságú – a „görbe" és az „egyenes" mint tulajdonság viszonyát érintő – megfontolásunk azonban csupán az alábbiakban következik:

Eukleidész úgy határozza meg az egyenest, mint ami az egyik ponttól a másik felé egyenletesen halad. A meghatározás értelme már kommentátorának Prokloszak is gondot okozott, amennyiben már ő is a modern definíciónak megfelelően úgy értelmezi Eukleidész ezen definícióját, mint hogy az egyenes vonal nem más, mint a két pont közötti legrövidebb út. Ezért meglepőnek tűnhet (és sokak számára annak is tűnik), hogy Kant az egyenes vonalnak a legrövidebb úttal való azonosítását szintetikus a priori ítéletnek tartja, amely analitikusan nem következik az egyenesség fogalmából, hanem csak a szemlélet alapján látható be (II. kiadás, Bevezetés V/1 – B 16.).[28] Pedig Kantnak igaza van: *az egyenletes vonal* és *a legrövidebb út* két különböző fogalom. Ha az üresként elképzelt térben egy vonalat jelenítünk meg, rögtön képesek vagyunk konstatálni azt, hogy az egyenes-e vagy görbe, mégpedig a legrövidebb út minden fogalma nélkül. S ugyanezt elmondhatjuk a tapasztalati világban kirajzolódó vonalakról is. Azaz az egyenesség megállapításához nincs szükségünk a legrövidebb út, sem az ehhez tartozó mérték fogalmára: amikor egy vonal közelítő vagy pontosan egyenes voltáról ítélkezünk, egyáltalában nem azt becsüljük meg, hogy az a legrövidebb utat képviseli-e. A „legrövidebb út" képzetének és fogalmának egyáltalában nincs is szerepe ebben az ítélethozatalban. S éppen ezt hangsúlyozza Kant, amikor az „egyenesség"-et olyan *minőségi* tulajdonságként jellemzi, amely nem tartalmaz még magában semmiféle mértéket, szemben a „legrövidebb" fogalmával, mely *mennyiségi* sajátosság.[29] Úgy tűnik tehát, hogy térszemléletünk számára – korábbi kérdésünket megválaszolva – egyáltalában nem relativizálható az egyenesség és a görbeség fogalma, és az egyenes szemléleti képzetéhez egyáltalában nincs szükség a legrövidebb út képzetére. E különbségtétel képessége egyszerűen szemléletünk adottsága, és azután e szemléletre reflektálva láthatjuk be *a priori*, de nem analitikus, hanem *szintetikus* módon, hogy az ily módon konstatált egyenletes vonal egyben a legrövidebb út is.[30]

Az egyenes és a görbe jelleg térszemléletünk általi ezen megkülönböztethetősége kivédhetetlen érvnek látszik az eukleidészi geometria kanti értelemben vett a priori volta mellett. Mert szemléletünk számára a nem eukleidészi geometriák egyenesei valójában nem egyenesek, hanem „görbék", még akkor is, ha ezen geometriák azokat a maguk elvont fogalmi-teoretikus konstrukcióikban egyenesnek nevezik és akként is kezelik, és az eukleidészi geometriának az egyenesekre vonatkozó tételeihez hasonló – de tartalmukban velük szögesen ellentétes – tételeket mondanak ki és bizonyítanak rájuk.

[28] Kant 1913, 36–37.
[29] Uo.
[30] Vö. ezzel kapcsolatban még pl. Bücher 1987, 150–152.

Kantiánusan megközelítve a dolgot, itt egyszerűen arról van szó, hogy a tér mint a külső világ érzékelésére szolgáló képességünk tiszta formája a priori magában hordozza az egyenesség és a görbeség közötti különbségtétel lehetőségét, azaz az egyenességnek mint egy vonal egyenletes haladásának etalonját, mégpedig a legrövidebb út minden fogalma nélkül. Ezen etalon alapján pedig a nem eukleidészi geometriák elvont, fogalmilag konstruált, a maguk kontextusában egyenesnek deklarált és akként kezelt vonalai nem egyenesek. Ennek megfelelően például a szférikus geometriában éppen azért nem húzható párhuzamos egy adott egyeneshez egy adott külső ponton át, a Bolyai–Lobacsevszkij-féle geometriában pedig éppen azért húzható végtelen sok ilyen párhuzamos, mert ezen geometriák egyenesei az érzéki szemlélet mércéje alapján nem egyenesek, hanem attól elhajló görbék. Ebből pedig az is következik, hogy ezt a tiszta szemléletben adott etalont követve egy egyeneshez bármely hozzá képest külső ponton át a priori egy és csak egy párhuzamos egyenes húzható, azaz ezen etalon alapján kizárólagosan az eukleidészi posztulátum az, ami – a priori szintetikus állításként – a logikailag lehetséges, eltérő posztulátumokkal szemben összhangban van szemléletünk külső formájával.

Igen fontos persze e tekintetben *annak a félreértésnek az elzárása, hogy itt a szemmértékről volna szó.* Az empirikus világban egyenesnek becsült objektumokról tudjuk, hogy nem tökéletes eukleidészi egyenesek, mint amiképpen a papírlapra rajzolt háromszög sem tökéletes háromszög. A tökéletes egyenes és a tökéletesen egyenes oldalú háromszög képzete viszont adva van számunkra, mivel e nélkül nem volna lehetséges sem az eukleidészi geometria, sem pedig az egyenesség megítélésre vonatkozó szemmérték.

Az egyenesség mibenlétére vonatkozó kérdés most hangsúlyozott szerepe nem kerülhette el teljesen a témával foglalkozó szerzők figyelmét sem. Az erre reflektáló elemzések többsége azonban csak a véges, vizuális-fenomenális terek esetében jut el az egyenesség tulajdonságának nem relativizálható, a priori voltához.[31] Ladislav Kvasz pedig éppen az egyenes volt e nem relativizálható jellegét elismerve állítja azt, hogy Kant

[31] Pl. Hopkins 1973, 7–17.; illetve Ewing 1938, 42.; Strawson 1966, 81.

elmélete mára elavult. Ugyanis szerinte a geometria XIX. századi fejlődésének egyik nóvuma éppen az volt, hogy a szemlélettől elvonatkoztatva immáron a „görbét" is egyenesként kezelte.[32] Ennek során persze nem veszi észre azt, hogy e nézetével éppen a szemlélet azon hangsúlyozott szerepét ignorálja, ami a kanti elmélet egyik alapvető megkülönböztető jegye, és álláspontjával éppen azt támasztja alá, hogy a modern absztrakt geometriák csupán olyan formális konstrukciók, amelyek – szemben az eukleidészi geometriával – a kanti értelemben véve üres spekulációk. Vele szemben viszont J. Kim – bár az egyenesség fogalmának szerepét a szemlélettel szemben a kanti koncepcióhoz képest némileg túlhangsúlyozza – többek között éppen az egyenes képzetének nem relativizálható voltára hivatkozva érvel az eukleidészi geometria kanti értelemben vett aprioritása mellett.[33]

Befejezésképpen – saját érveink felsorolása után – megemlítjük még, hogy néhány olyan szerzőnél, akik hozzánk hasonlóan az eukleidészi geometria a priori szintetikus voltára vonatkozó kanti tézist a logika és a geometria azóta eltelt fejlődésének és eredményeinek jegyében is érvényesnek tartják, további – a fentiektől eltérő – érveket találhatunk ezen állítás mellett.[34] Ezekkel az érvekkel viszont (s ennek részeként azzal, hogy azok mennyire felelnek meg az itt kifejtett koncepciónak, illetve hogyan viszonyulnak hozzá) itt hely hiányában nem foglalkozhatunk.

IV. Összegzés

Erős diszkurzív érvek hozhatóak fel amellett tehát, hogy térszemléletünk kitünteti az eukleidészi geometriát. Így az érzéki szemlélet számára adódó térbeli struktúrák mind eleget tesznek az eukleidészi geometriának – még akkor is, ha alternatív módon leírhatóak nem eukleidészi geometriákkal (mint amiképpen tipikusan ez az eset a nem eukleidészi geometriák eukleidészi modelljeivel). Továbbá Kant szerint a tér a külső érzék tiszta formája, s a nem eukleidészi terek pedig tartalmaznak egy olyan ténye-

[32] Kvasz 2011.
[33] Kim 2006.
[34] Lásd fentebb a 4. és 5. hivatkozást.

zőt – a „görbület”-et –, amely modifikálja e tiszta teret, és éppen ezen nem egészen „tiszta volt” miatt térnek el az eukleidészi geometriától. Végül térszemléletünk számára az egyenes és a görbe jelleg olyan nem relativizálható, alapvető különbség, amelynek jegyében csak az eukleidészi geometriájú tér tekinthető a tiszta szemléletnek megfelelő, „el nem görbített” – s mint ilyen „eredendő” – térnek.

Nem állítjuk, hogy fenti érveink feltétlenül meggyőző erejűek azok számára, akik úgy vélik, hogy a nem eukleidészi geometriák az eukleidészi geometria a priori voltára vonatkozó kanti tanítást tarthatatlanná tették (vagy legalábbis védekező pozícióba szorították); illetve azok számára, akik váltig állítják, hogy az ő saját térszemléletük nem eukleidészi. Viszont erősen Kant mellett szóló, s nehezen vitatható érvekről van szó, amelyek jegyében egyúttal kritikailag értelmezhető és elemezhető az e témával foglalkozó Kant-irodalomban jelen lévő álláspontok gazdag sokasága. Ezért ezen érvek megfordítják a kanti tanítás és az azt elvető, illetve azt csak jelentős korlátozásokkal vagy revízióval megtarthatónak vélő álláspontok viszonyát: immár nem a kanti pozíció szorul védekezésre, hanem a szkeptikus és revizionista oldalnak kell szembesülnie ezen érvekkel, és igazolnia velük szemben saját álláspontjának megalapozottságát.

Irodalom

Barker, S. 1992. „Kant’s View of Geometry: A Partial Defense”. In Posy 1992. 221–244.

Büchel, Georg 1987. *Geometrie und Philosophie. Zum Verhältnis beider Vernunftwissenschaften im Fortgang von der Kritik der reinen Vernunftzum Opus postumum (Kantstudien-Erganzungshefte).* Berlin: Walter de Gruyter.

Carnap, Rudolf 1966. *Philosophical Foundations of Physics.* New York: Basic Books.

Carnap, Rudolf 1995. *An Introductionto the Philosophy of Science.* New York.

Carson, E. 1997. „Kant on Intuition in Geometry”. *Canadian Journal of Philosophy* 27. 4. 489–512.

Cassirer, Ernst 1907. Kant und die moderne Mathematik. *Kant Studien* Zwölter Band. 1. 1–49.
https://archive.org/details/kantstudienphilo12kantuoft 29–31.

Cassirer, Ernst 1922. „Einstein Theory of Relativity Cosidered from the Epistemological Standpoint”. *The Monist* 32. 1. 89–134.

http://www.jstor.org/stable/27900894?seq=1#page_scan_tab_contents

Craig, E. J. 1969. „Phenomenal Geometry". *British Journal For the Philosophy of Science* 20. 121–134.

Dunlop, Katherine 2012. „Kant and Strawson on the Content of Geometrical Concepts". *Nous* 46. 1. 86–126.

Einstein, Albert 2005. „Geometria és tapasztalat". In *Válogatott írásai*. Budapest: Typotex. 282–293.

Ewing, A. C. 1938. *A Short Commentary on Kant's Critique of Pure Reason*. London: Methuen.

Friedman, M. 1985. „Kant's Theory of Geometry". *The Philosophical Review* 94. 4. 455–506.

Friedman, M., 2000. „Geometry, Construction and Intuition in Kant and His Successors". In G. Scher és R. Tieszen (szerk.) *Between Logic and Intuition: Essays in Honor of Charles Parsons*. Cambridge: Cambridge University Press. 186–218.

Friedman, M. 2012. „Kant on Geometry and Spatial Intuition". *Synthese* 186. 231–255.

Godlove, Terry F. Jr. 2009. „Poincaré, Kant, and the Scope of Mathematical Intuition". *The Review of Metaphysics* 62. 4. 779–801.

Grozdanoff, Boris: http://www.researchgate.net/profile/Boris_Grozdanoff/

Hagar, A. 2008. „Kant and Non-Euclidean Geometry". *Kant-Studien* 99. 1.: 80–98.

Harper, W. 1984. „Kant on Space, Empirical Realism and the Foundations of Geometry". *Topoi* 3. 2. 143–161. [Valamint Posy 1992, 257–191.]

Hatfield, Gary 1984. „Spatial Perception and Geometry in Kant and Helmholtz". In *Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association 1984, Volume Two: Symposia and Invited Papers*. The University of Chicago Press. 569–587.

Heis, Jeremy 2011. „Ernst Cassirer's Neo-Kantian Philosophy of Geometry". *British Journal for the History of Philosophy* 19. 4. 759–794.

Helmholtz, Hermann von 1876. „The Origin and Meaning of Geometrical Axioms". *Mind* I. III. 301–321.

Hintikka, J. 1965. „Kant's new method of thought and his theory of mathematics". *Ajatus* 27. 37–43. Reprinted in J. Hintikka, J. 1974. *Knowledge and the Known*. Dordrecht: Reidel. 126–134.

Hintikka 1984. „Kant's Transcendental Method and His Theory of Mathematics". *Topoi* 3. 2. 99–108. [Valamint Posy 1992, 341–360.]

Holmes, Eugene C. 1955. „The Kantian Views on Space and Time Reevaluated". *Philosophy and Phenomenological Research* 16. 2. 240–244.

Hopkins, J. 1973. „Visual Geometry". *The Philosophical Review* 82. 1. 3–34.
Izard, V., Pica, P. de, Spelke, E. S., Dehaene, S. 2011. „Flexible intuitions of Euclidean geometry in an Amazonian indigene group". *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 108. 24. 9782–9787.
Jauernig, A. 2013. „The synthetic nature of geometry, and the role of construction in intuition". In S. Bacin, A. Ferrarin, C. La Rocca, and M. Ruffing (szerk.) *Kant Und Die Philosophie in Weltbürgerlicher Absicht: Akten des XI. Kant-Kongresses 2010. Akten des XI. Internationalen Kant Kongresses 2010*. Berlin – New York: Walter de Gruyter. 89–100.
Jones, Philip Chapin 1946. „Kant, Euclid, and the Non-Euclideans". *Philosophy of Science* 13. 2. 137–143.
Jong, Willem R. de 2010. „The analytic-synthetic distinction and the classical model of science: Kant, Bolzano and Frege". *Synthese* 174. 237–261.
Kant, Immanuel 1913. *A tiszta és kritikája.* Ford: Alexander Bernát és Bánóczi József. Budapest: Franklin Társulat.
Kim, J. 2006. „Concepts and Intuitions in Kant's Philosophy of Geometry". *Kant-Studien* 97. 2.138–162.
Kitcher, P. 1975. „Kant and the Foundations of Mathematics". *The Philosophical Review* 84. 1. 23–50. [Valamint Posy 1992, 109–134.]
Kjosavik, Frode 2009. „Kant on Geometrical Intuition and the Foundation of Mathematics". *Kant Studien* 100. 1. 1–27.
Körner, Stephan von 1966. „Zur kantischen Begründung der Mathematik und der Naturwissenschaften". *Kant Studien* 56. 3-4. 463–473.
Kvasz, Ladislav 2011. „Kant's Philosophy of Geometry – On the Road of a Final Assesment". *Philosophia Mathematica* III. 19. 139–166.
Land, J. P. N. 1877. „Kant's Space and Modern Mathematics". *Mind* 2. 5. 38–46.
Lenhard, Johannes 2006. „Kants Philosophie der Mathematik und die umsrittene Rolle der Anschauung". *Kant Studien* 97. 3. 301–317.
Lobacsevszkij, Nikolai I. 1829/30. „O natchalah geometrij". *Kazanskij Vestnik* 25. 178–187., 228–241., 27. 227–243., 28. 251–283. [Német nyelvű kiadása: Über die Anfangsgründe der Geometrie. In uő *Zwei Geometrische Abhandlungen*. Leipzig: Teubner, 1898. http://quod.lib.umich.edu/u/umhistmath/aca1481.0001.001/20?page=root;rgn=full+text;size=100;view=pdf
Lucas, J. R. 1969. „Euclides ab omninaevovindicatus". *The British Journal for the Philosophy of Science* 20. 1. 1–11.
Mermin, David N. 2009. „What's bad about this habit?". *Physics Today* May 8–9.
Merrick, Terry 2006. „What Frege Meant When He Said: Kant is Right about Geometry". *Philosophia Mathematica* III. 14. 44–75.

Nelson, Lenard 1906. „Bemerkungen über die nicht euklidische Geometrie und den Ursprung der mathematischen Gewißheit". *Abhandlunden der Fries'sehen Schule* Bd. 1 Heft 2/3. 373–430.
Natterer, Paul 2003. *Systematische Kommetar zur Kritik der Reinen Vernunft: interdisziplinäre Bilanz der Kantforschung seit 1945*. Berlin: Walter de Gruyter.
Parsons, Charles 1964. „Infinity and Kant's Conception of the »Possibility of Experience«". *The Philosophical Review* 73. 2. 182–197.
Poincaré, H. 1908. *Tudomány és föltevés*. Budapest: Kir. Magyar Természettudományi Társulat.
Poisy, Carl J. (szerk.) 1992. *Kant's Philosophy of Mathematics: Modern Essays*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
Reichenbach, Hans. 1936. „Logistic Empiricism in Germany and the Present State of its Problems". *The Journal of Philosophy* 33. 6. 141–160.
Reichenbach, Hans 1958. *The Philosophy of Space and Time*. New York: Dover.
Risjord, Mark 1990. „The Sensible Foundation for Mathematics: A Defense of Kant's View". *Studies in History and Philosophy of Science* 21. 1. 123–143.
Russell, Bertrand 1897. *An Essay on the Foundation of Geometry*. Cambridge: Cambridge University Press.
Russell, Bertrand 1903. *The Principles of Mathematics*. London: Routledge.
Russell, Bertrand 1919. *Introduction to Mathematical Philosophy*. London: Routledge.
Russell, Bertrand 1945. *A History of Western Philosophy*. New York: Simon and Schuster.
Shabel, Lisa 2004. „Kant's »Argument from Geometry«". *Journal of the History of Philosophy* 42. 2. 195–215.
Schirn, M. 1991. „Kants Theorie der geometrischen Erkenntnis und die nichteuklidische Geometrie". *Kant Studien* 82. 1. 1–28.
Strawson, Peter 1966. *The Bounds of Sense: an essay on Kant's 'Critique of pure reason'*. London: Methuen.
Warren, Daniel 2008. „Kant and the Apriority of Space". *The Philosophical Review* 107. 2. 179–224.

L'Harmattan France
5-7 rue de l'Ecole Polytechnique
75005 Paris
T.: 33.1.40.46.79.20
Email: diffusion.harmattan@wanadoo.fr

L'Harmattan Italia SRL
Via Degli Artisti 15
10124 TORINO
Tél: (39) 011 817 13 88 / (39) 348 39 89 198
Email: harmattan.italia@agora.it

Olvasószerkesztő: Karip Tímea
Borítóterv: Kára László
Tördelés: Kállai Zsanett
Nyomdai kivitelezés: Robinco Kft.,
felelős vezető Kecskeméthy Péter